

آزمون های آزمایشی Omega

پاسخنامه پایه دوازدهم ریاضی

نام درس	شماره سوال
آمار و احتمال	۱-۱۰
حسابان دوازدهم	۱۱-۲۰
ریاضی دهم	۲۱-۳۰
حسابان یازدهم	۳۱-۴۰
هندسه دوازدهم	۴۱-۵۰
هندسه دهم	۵۱-۶۰
هندسه یازدهم	۶۱-۷۰
فیزیک دوازدهم	۷۱-۸۰
فیزیک دهم	۸۱-۹۰
فیزیک یازدهم	۹۱-۱۰۰
شیمی دوازدهم	۱۰۱-۱۱۰
شیمی دهم	۱۱۱-۱۲۰
شیمی یازدهم	۱۲۱-۱۳۰



اگر میخواهید خواب هایتان تعبیر شوند ، اول باید بیدار شوید ☺

1	☐ ☐ ☐ ☒	11	☐ ☐ ☐ ☒	21	☐ ☒ ☐ ☐	31	☐ ☒ ☐ ☐	41	☐ ☐ ☐ ☒
2	☐ ☐ ☐ ☒	12	☐ ☒ ☐ ☐	22	☒ ☐ ☐ ☐	32	☒ ☐ ☐ ☐	42	☐ ☒ ☐ ☐
3	☐ ☐ ☐ ☒	13	☒ ☐ ☐ ☐	23	☐ ☐ ☐ ☒	33	☐ ☒ ☐ ☐	43	☐ ☐ ☒ ☐
4	☐ ☒ ☐ ☐	14	☒ ☐ ☐ ☐	24	☐ ☐ ☒ ☐	34	☐ ☐ ☐ ☒	44	☐ ☒ ☐ ☐
5	☐ ☐ ☒ ☐	15	☐ ☐ ☒ ☐	25	☐ ☐ ☐ ☒	35	☒ ☐ ☐ ☐	45	☐ ☒ ☐ ☐
6	☐ ☐ ☒ ☐	16	☐ ☒ ☐ ☐	26	☐ ☐ ☐ ☒	36	☐ ☒ ☐ ☐	46	☐ ☐ ☐ ☒
7	☐ ☐ ☒ ☐	17	☒ ☐ ☐ ☐	27	☒ ☐ ☐ ☐	37	☐ ☒ ☐ ☐	47	☒ ☐ ☐ ☐
8	☐ ☐ ☐ ☒	18	☐ ☒ ☐ ☐	28	☐ ☐ ☐ ☒	38	☐ ☐ ☐ ☒	48	☐ ☐ ☐ ☒
9	☐ ☐ ☐ ☒	19	☐ ☐ ☒ ☐	29	☐ ☒ ☐ ☐	39	☐ ☐ ☒ ☐	49	☐ ☐ ☐ ☒
10	☐ ☐ ☐ ☒	20	☐ ☒ ☐ ☐	30	☒ ☐ ☐ ☐	40	☐ ☐ ☒ ☐	50	☐ ☒ ☐ ☐
51	☐ ☐ ☒ ☐	61	☐ ☐ ☒ ☐	71	☐ ☒ ☐ ☐	81	☐ ☐ ☒ ☐	91	☐ ☒ ☐ ☐
52	☒ ☐ ☐ ☐	62	☐ ☐ ☒ ☐	72	☐ ☐ ☒ ☐	82	☒ ☐ ☐ ☐	92	☐ ☒ ☐ ☐
53	☐ ☒ ☐ ☐	63	☐ ☐ ☐ ☒	73	☐ ☐ ☒ ☐	83	☐ ☒ ☐ ☐	93	☒ ☐ ☐ ☐
54	☐ ☐ ☐ ☒	64	☐ ☐ ☒ ☐	74	☐ ☒ ☐ ☐	84	☐ ☐ ☐ ☒	94	☒ ☐ ☐ ☐
55	☐ ☐ ☐ ☒	65	☐ ☐ ☒ ☐	75	☐ ☐ ☒ ☐	85	☐ ☐ ☒ ☐	95	☒ ☐ ☐ ☐
56	☒ ☐ ☐ ☐	66	☐ ☐ ☒ ☐	76	☐ ☐ ☒ ☐	86	☐ ☒ ☐ ☐	96	☐ ☐ ☐ ☒
57	☐ ☐ ☐ ☒	67	☒ ☐ ☐ ☐	77	☐ ☐ ☐ ☒	87	☐ ☐ ☒ ☐	97	☐ ☐ ☒ ☐
58	☐ ☐ ☒ ☐	68	☐ ☐ ☐ ☒	78	☐ ☐ ☐ ☒	88	☐ ☒ ☐ ☐	98	☒ ☐ ☐ ☐
59	☐ ☐ ☐ ☒	69	☐ ☒ ☐ ☐	79	☐ ☒ ☐ ☐	89	☐ ☐ ☒ ☐	99	☐ ☐ ☒ ☐
60	☐ ☐ ☐ ☒	70	☒ ☐ ☐ ☐	80	☐ ☐ ☒ ☐	90	☒ ☐ ☐ ☐	100	☐ ☐ ☐ ☒
101	☐ ☒ ☐ ☐	111	☐ ☒ ☐ ☐	121	☒ ☐ ☐ ☐				
102	☐ ☐ ☒ ☐	112	☐ ☐ ☒ ☐	122	☐ ☐ ☐ ☒				
103	☐ ☒ ☐ ☐	113	☐ ☒ ☐ ☐	123	☐ ☐ ☒ ☐				
104	☒ ☐ ☐ ☐	114	☒ ☐ ☐ ☐	124	☐ ☐ ☐ ☒				
105	☐ ☐ ☒ ☐	115	☒ ☐ ☐ ☐	125	☐ ☒ ☐ ☐				
106	☐ ☐ ☒ ☐	116	☐ ☒ ☐ ☐	126	☐ ☐ ☒ ☐				
107	☒ ☐ ☐ ☐	117	☐ ☒ ☐ ☐	127	☐ ☐ ☒ ☐				
108	☐ ☐ ☒ ☐	118	☒ ☐ ☐ ☐	128	☐ ☐ ☐ ☒				
109	☒ ☐ ☐ ☐	119	☐ ☐ ☒ ☐	129	☐ ☐ ☐ ☒				
110	☐ ☒ ☐ ☐	120	☐ ☐ ☒ ☐	130	☒ ☐ ☐ ☐				

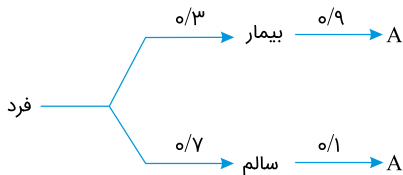
گزینه ۴

۱

دو پیشامد زیر را داریم:

واقعاً بیمار بودن : B

بیمار بودن فرد توسط پزشک : A



$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0/3 \times 0/9}{0/3 \times 0/9 + 0/7 \times 0/1} = \frac{0/27}{0/34} = \frac{27}{34}$$

گزینه ۴

۲

احتمال سفید بودن دومی $\frac{\binom{W}{1}}{\binom{10}{1}}$ و احتمال سیاه بودن چهارمی $\frac{\binom{B}{1}}{\binom{9}{1}}$ است، پس داریم:

$$\frac{W \times B}{9 \times 10} = \frac{4}{15} \Rightarrow W \times B = 24$$

حالا باتوجه به $W + B = 10$ داریم: $W = 6, B = 4$ (یا برعکس)

پس احتمال خروج ۲ مهره هم‌رنگ می‌شود:

$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 + 15}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

گزینه ۴

۳

چون گزاره شرطی داریم که مقدم آن درست است، در نتیجه برای آنکه نتیجه کلی نادرست باشد باید تالی آن حتماً نادرست باشد.
از میان گزینه‌ها فقط گزینه "۴" نادرست است، زیرا $11 \times 11 = 121$ و ۱۲۱ عدد اول نیست.



$$\frac{3!}{1! 2!} = 3 \Rightarrow \text{افراز } 3$$

این مجموعه به تعداد $n(S) = \binom{12}{4} = 495$ زیرمجموعه ۴ عضوی دارد و ما زیرمجموعه‌هایی به شکل $\{4, a, b, 12\}$ یا $\{8, a, b, 12\}$ یا $\{4, a, b, 8\}$ را می‌خواهیم.

در اولی و دومی برای a و b به تعداد $\binom{3}{2}$ و در سومی به تعداد $\binom{7}{2}$ حالت داریم، پس:

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{7}{2} = 27$$

و بنابراین:

$$P = \frac{27}{495} = \frac{3 \times 9}{11 \times 5 \times 9} = \frac{3}{55}$$

پیشامد مشخص شده در نمودار ون، همان A' است. قبل از شروع حل، به سه موضوع توجه کنید:

$$\begin{cases} ۱) A - B = A \cap B' \\ ۲) A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases} \\ ۳) A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \Rightarrow \begin{cases} A' \cap B' = B' \\ A' \cup B' = A' \end{cases} \end{cases}$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱ "باتوجه به مورد ۳ بالا درست است و جواب تست نیست.

سایر گزینه‌ها:

$$\text{گزینه ۲: } (A - B')' = (A \cap (B')')' = (A \cap B)' = A'$$

$$\text{گزینه ۳: } A - (A' - B) = A - (A' \cap B') = A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = A$$

$$\text{گزینه ۴: } (A - (B' - A))' = (A - (B' \cap A'))' = (A - B')' = (A \cap (B')')' = (A \cap B)' = A'$$

$$2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

برای نقیض کردن، نوع سور را عوض کرده، $\wedge$ به $\vee$ تبدیل شده و تک تک گزاره‌ها را نقیض می‌کنیم، اما مجموعه دامنۀ متغیر را عوض نمی‌کنیم.

جعبه ابزار: اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه، خاصیت حذف‌پذیری ندارند.

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C \\ A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C \\ A - B = A - C \not\Rightarrow B = C \end{cases}$$

گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" در کتاب درسی اثبات شده‌اند. اما در مورد گزینه "۴"، مثال نقض وجود دارد:

$$A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$$

واضح است که $A \cup B = A \cup C = \{1, 2\}$ ولی $B \neq C$.

دو پیشامد A و B مستقل هستند هرگاه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ باشد:

$$A = \{(\omega, 1), (\omega, 2), (\omega, 3), (\omega, 4), (\omega, 5), (\omega, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

حالا تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم.
گزینه ۱:

$$P(B) = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(\omega, 1), (\omega, 3), (\omega, 5)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

پیشامدهای A و B مستقل هستند.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \checkmark$$

گزینه ۲:

$$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$$

$$A \cap C = \{(\omega, 5)\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{36} \Rightarrow P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$$

مستقل هستند.

گزینه ۳:

$$D = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow P(D) = \frac{1}{6}$$

$$A \cap D = \{(\omega, 2)\} \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{1}{36} \Rightarrow P(A \cap D) \neq P(A) \times P(D)$$

مستقل هستند.

گزینه ۴:

$$P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap E = \{(\omega, 1), (\omega, 3), (\omega, 5)\} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{12}$$

مستقل نیستند.

$$P(A \cap E) \neq P(A) \times P(E)$$

$$2 = 2 - 3f\left(-\frac{2}{3} - 1\right) \Rightarrow f(-2) = 0$$

$$2 - x = -2 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow y = 2f(2 - 4) - 1 = 2f(-2) - 1 = -1$$

جواب : $(4, -1)$

جعبه ابزار: تابع درجه ۳ - فرم کلی تابع درجه ۳

در تابع $g(x) = f(x) - 48$ داریم:

$$g(1) = g(2) = g(3) = 0$$

بنابراین $x = 1$ و $x = 2$ و $x = 3$ ریشه‌های تابع درجه سوم g خواهند بود، بنابراین:

$$g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow f(x) - 48 = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 48$$

$$\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = a(-2)(-3)(-4) + 48 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3) + 48$$

$$\Rightarrow f(0) = -12 + 48 = 36$$

$$a + f(0) = 2 + 36 = 38$$

چالش سؤال: تبدیل تابع f به تابع g و نوشتن فرم کلی معادله درجه ۳

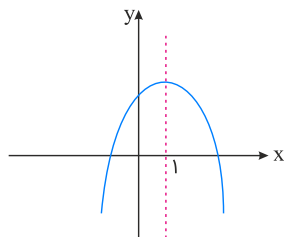
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = y \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

$$f^{-1}(2x+1) - f^{-1}(x-1) \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(2x+1) \geq f^{-1}(x-1)$$

$$\Rightarrow x-1 \geq 2x+1 \Rightarrow x \leq -2$$

ضابطه تابع، ضابطه یک سهمی را نشان می‌دهد که باتوجه به بازه‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی تابع، می‌توان دریافت که $x = 1$ محور تقارن تابع است و

اینکه سهمی رو به پایین است، بنابراین ضریب x^2 منفی و $-\frac{b}{2a} = 1$ است.



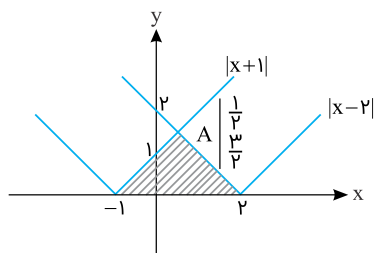
$$m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$$

$$-\frac{2(m^2 - 3)}{2(m - 3)} = 1 \Rightarrow -(m^2 - 3) = m - 3$$

$$\Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \xrightarrow{m < 3} \text{ قابل قبول} \\ m = -3 \xrightarrow{m < 3} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر است با $-1 = 2 + (-3)$.

در ابتدا نمودارهای $|x+1|$ و انتقال یافته آن یعنی $|x-2|$ را با هم رسم می‌کنیم و نقطه برخوردشان را هم پیدا می‌کنیم:



$$x+1=2-x \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A\left|\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right|$$

پس مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$S=\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2=\frac{3}{2}=1.5$$

$$\begin{cases} x=-2 \Rightarrow R_1=-2f(-1)=6 \Rightarrow f(-1)=-3 \\ x=-2 \Rightarrow R_2=-f(-2)=4 \Rightarrow f(-2)=-4 \end{cases}$$

$$x=-1 \Rightarrow R=f(-2)+f(-1)=-4-3=-7$$

جعبه ابزار: هنگامی سهمی قائم از نقطه‌ای به بعد اکیداً نزولی است که اولاً: ماکزیمم داشته باشد؛ ثانیاً: محور تقارن قبل یا مساوی طول آن نقطه باشد.
اولاً: باید سهمی ماکزیمم داشته باشد:

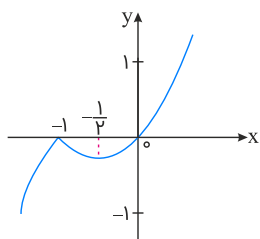
$$k-2 < 0 \Rightarrow k < 2 \quad (1)$$

ثانیاً:

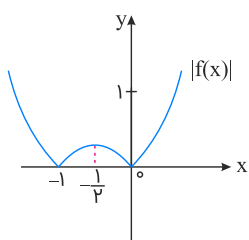
$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \leq 2 \Rightarrow \frac{\Delta k}{2(k-2)} \leq 2 \\ \xrightarrow{k-2 < 0} \Delta k &\geq 4k-8 \Rightarrow k \geq -8 \quad (2) \\ \xrightarrow{(1) \cap (2)} &-8 \leq k < 2 \end{aligned}$$

اول نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x+1| = \begin{cases} x(x+1) & ; x \geq -1 \\ -x(x+1) & ; x < -1 \end{cases}$$



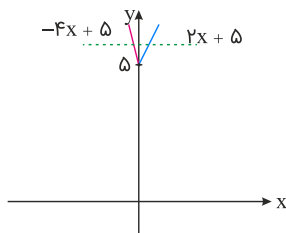
حالا نمودار $|f(x)|$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل تابع در فاصله‌های $(-\infty, -1]$ و $[-\frac{1}{2}, 0]$ اکیداً نزولی است.

الف) تابع $y = (a-1)x^2 + ax + 5$ به ازای $a \neq 1$ ، یک تابع درجه دوم بوده و یک به یک نمی باشد.

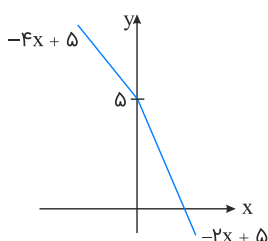
دقت کنیم به ازای $a = 1$ ، تابع تبدیل به تابع با ضابطه $y = x + 5$ می شود که خطی صعودی و یک به یک است، پس این تابع همواره یک به یک نمی باشد.
ب) نمودار تابع را رسم می کنیم، داریم:



نکته مهم: در تابع $y = mx + h \pm |m'x + h'|$ ، اگر $|m| > |m'|$ باشد، تابع اکیداً یکنوا و یک به یک است. داریم:

$$y = 3|x| - x + 5 \xrightarrow[m'=3]{m=-1} |m| \not> |m'| \Rightarrow \text{غیریک به یک}$$

ج) ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم. داریم:

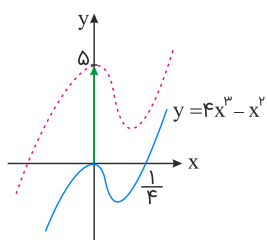


$$y = |x| - 3x + 5 \xrightarrow[m'=1]{m=-3} |m| > |m'| \Rightarrow \text{یک به یک}$$

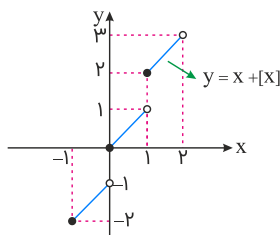
د) تابع با ضابطه $y = 2x^3 + x + 5$ به صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی $2x^3$ و x است، پس قطعاً این تابع نیز اکیداً صعودی بوده و یک به یک است. دقت کنیم در ضابطه تابع عدد ۵ را نمی بینیم (چون گویی نمودار تابع ۵ واحد به سمت yهای مثبت انتقال قائم یافته است).

ه) در تابع با ضابطه $y = 4x^3 - x^2 + 5$ ، ابتدا ۵ را نادیده می گیریم. تابعی که یک به یک نمی باشد (هرچقدر انتقال قائم دهیم، باز هم یک به یک نمی باشد)، حال چون تابع بیش از یک ریشه دارد، پس قطعاً یک به یک نمی باشد. داریم:

$$y = 4x^3 - x^2 = x^2(4x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$



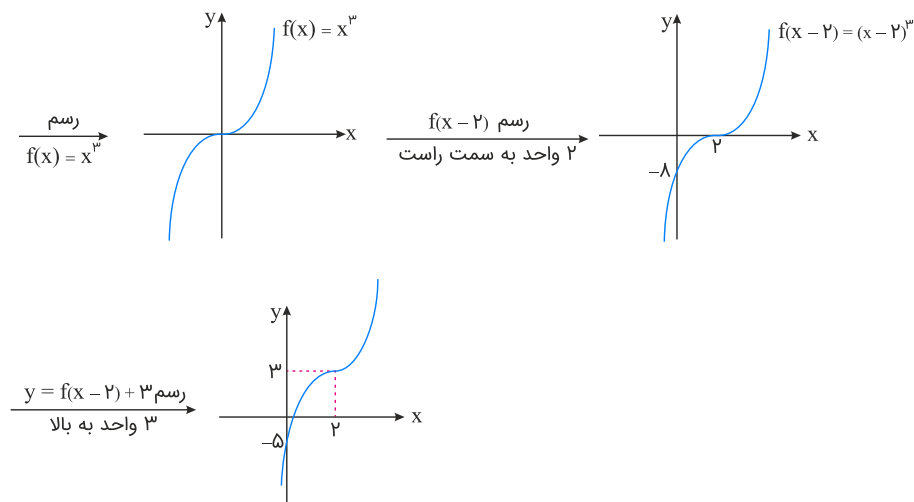
و) تابع $y = x + [x] + 5$ به صورت مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع صعودی است، پس قطعاً این تابع اکیداً صعودی بوده و یک به یک است.



پس ۳ تا از توابع داده شده، همواره یک به یک هستند.

برای رسم نمودار تابع f ، باید ابتدا ضابطه آن را ساده کنیم. داریم:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = \underline{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} + 3 = \underline{(x-2)^3} + 3$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، نمودار تابع فوق از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

باید بتوانیم به جای $\sqrt{48} + 7$ ، یک عبارت مربع کامل قرار دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{3} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \\ \Rightarrow A^2 &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

جعبه ابزار: اتحاد مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$x^6 - 5x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{\div x^2} x^4 - 5 + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{x^2} = 5$$

حال دو طرف این عبارت را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^6 + \frac{\lambda}{x^6} + 3 \times x^2 \times \frac{2}{x^2} (x^2 + \frac{2}{x^2}) = 125$$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{\lambda}{x^6} + 3 \times 2 \times 5 = 125 \Rightarrow x^6 + \frac{\lambda}{x^6} = 95$$

$$\xrightarrow{+5} x^6 + \frac{\lambda}{x^6} + 5 = 100 \Rightarrow \frac{x^{12} + 5x^6 + \lambda}{x^6} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{x^6}{x^{12} + 5x^6 + \lambda} = \frac{1}{100} = 0.01$$

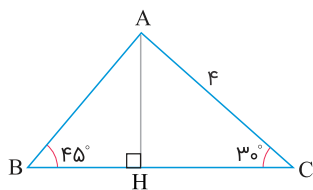
چالش سؤال: ساختن عبارت خواسته‌شده از عبارت به‌دست‌آمده اولیه - فرم دیگر اتحاد مکعب دو جمله‌ای

برای رسیدن از معادلهٔ مربوط به α به معادلهٔ مربوط به β دو قدم طی می‌کنیم:
 قدم اول: طرفین معادلهٔ $\sqrt{6} = 3^\alpha$ را به توان دو می‌رسانیم. داریم: $3^{2\alpha} = 6$
 قدم دوم: طرفین معادلهٔ اخیر را به توان β می‌رسانیم. داریم:

$$(3^{2\alpha})^\beta = 6^\beta \Rightarrow 3^{2\alpha\beta} = 6^\beta \xrightarrow{\beta = \frac{1}{\sqrt{11}}} 3^{2\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow 3^{2\alpha\beta} = 3^{-\frac{1}{\sqrt{11}}} \Rightarrow 2\alpha\beta = -\frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{1}{2\sqrt{11}}$$

جعبه ابزار: تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه
 ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:



$$\triangle ACH : \sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2$$

$$\triangle ACH : \cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{4} \Rightarrow CH = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle ABH : \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow 1 = \frac{2}{BH} \Rightarrow BH = 2$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده}$$

$$= \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + 2\sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3}$$

چالش سؤال: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی تعریف می‌شوند.

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\lambda}{\omega} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\lambda}{\omega} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\omega}{\lambda}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) = \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\omega}{\lambda}} \left(1 - \frac{\omega}{\lambda}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{\lambda} = \frac{9}{16}$$

$$P(x, 3x) : x^2 + (3x)^2 = 1 \Rightarrow 10x^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{\sqrt{10}}, y = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

می‌دانیم: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و طبق فرض مسئله، $a = \frac{1}{\cos x} + \tan x$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right) \underbrace{\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right)}_a = 1$$

حال با حل دستگاه زیر، مقدار $\frac{1}{\cos x}$ را پیدا می‌کنیم:

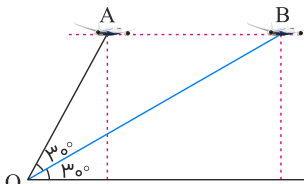
$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{\cos x} + \tan x = a \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\cos x} = \frac{1}{a} + a = \frac{1+a^2}{a} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1+a^2}{2a}$$

$$\frac{1 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x + 2 \cot x$$

پس:

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow ab = 2$$

به شکل زیر توجه کنید:
در مثلث OAA' داریم:



$$\tan 60^\circ = \frac{AA'}{OA'} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5}{OA'} \Rightarrow OA' = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

در مثلث OBB' هم داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{BB'}{OB'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OB'} \Rightarrow OB' = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

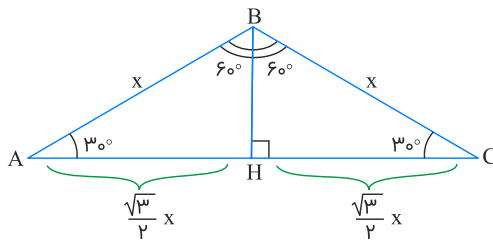
پس:

$$A'B' = OB' - OA' = \frac{15}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

پس درواقع هواپیما مسافت $\frac{10}{\sqrt{3}}$ کیلومتر را با سرعت $\sqrt{3}$ کیلومتر بر دقیقه طی کرده است. مطابق رابطه $x = V t$ داریم:

$$\frac{10}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}t \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}t \Rightarrow t = \frac{10}{3}$$

چون زوایای A و C باهم برابرند، پس مثلث ABC متساوی الساقین است ($AB = BC$). حال طول دو ساق را برابر x می‌گیریم. به کمک رسم ارتفاع BH، اندازه ضلع AC را برحسب x حساب می‌کنیم، داریم:



$$\triangle BCH : \cos 30^\circ = \frac{HC}{x} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{3}}{2}x \xrightarrow{\times 2} AC = 2HC = \sqrt{3}x$$

محیط مثلث ABC، $6 + 4\sqrt{3}$ است، پس داریم:

$$x + x + x\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})x = 6 + 4\sqrt{3} \\ \Rightarrow x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

حالا مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \underset{\downarrow x}{AB} \times \underset{\downarrow x}{BC} \times \underbrace{\sin \widehat{B}}_{\sin 120^\circ} = \frac{1}{2} \times \cancel{\cancel{2\sqrt{3}}} \times \cancel{\cancel{2\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

بدون رسم نمودار می‌توان این گونه استدلال کرد:

در محدوده $-1 < x < -2$ داریم: $y = -2$ در محدوده $-1 \leq x < 0$ داریم: $y = -1$

در محدوده $0 \leq x < 1$ داریم: $y = 0$ در محدوده $1 \leq x < 2$ داریم: $y = 1$

در محدوده $2 \leq x < 3$ داریم: $y = 2$ و برای $x = 3$ داریم: $y = 3$

پس برد تابع به صورت $\mathbb{R} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد.

روش اول:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

روش دوم: در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، داریم:

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

از طرفی ترکیب هر تابع با وارونش، برابر تابع همانی است، پس داریم:

$$f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)} f(f(x)) = x \text{ یا } f(f^{-1}(x)) = x$$

حال چون در تابع $f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ مقدار $a+d=0$ است، پس بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای، برای تعیین ضابطه تابع $f \circ f(x)$ می‌توانیم ضابطه $f(f^{-1}(x))$ یا $f^{-1}(f(x))$ را مشخص نماییم که برابر تابع همانی x است.

روش سوم:

مقدار ضابطه $f \circ f(x)$ را به ازای x دلخواهی به دست آورده و سپس این مقدار دلخواه را در تکتک گزینه‌ها، جایگذاری کرده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای همان x_0 همان مقدار را بدهد. داریم:

$$f(f(x)) \xrightarrow{x=1} f(f(1)) = f(0) = 1$$

تنها گزینه (۱) به ازای $x = 1$ برابر با ۱ می‌شود.

ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ را می‌نویسیم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y - b}{a} \Rightarrow \text{عوض کردن جای } y \text{ و } x \Rightarrow y = \frac{x - b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

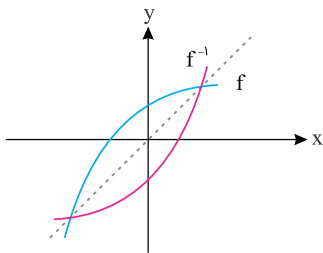
دو تساوی داده‌شده را با f و f^{-1} به‌دست‌آمده می‌نویسیم: (از $f(o) \neq o$ نتیجه می‌گیریم $b \neq 0$)

$$f^{-1}(o) = f(o) \Rightarrow \frac{-b}{a} = b \xrightarrow{\times \frac{1}{b}} \frac{-1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

تا این‌جا داریم: $f^{-1}(x) = f(x) = -x + b$

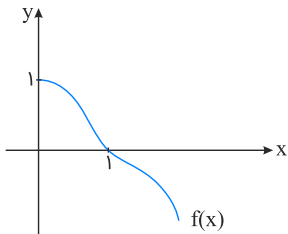
$$f^{-1}(2) = 7 \Rightarrow -2 + b = 7 \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow f(x) = -x + 9 \Rightarrow f(4) = -4 + 9 = 5$$



با توجه به شکل بالا f^{-1} در فاصله -2 تا 1 زیر $y = x$ قرار می‌گیرد. پس دامنهٔ رادیکال با شرط $x \geq f^{-1}(x)$ به‌صورت $[-2, 1]$ است که در اعداد صحیح ۴ عضو ۰، ۱، -۱، -۲ را دارد.

نمودار تابع f مشخص می‌کند که $R_f = (-\infty, 1]$ است و می‌دانیم $R_f = D_{f^{-1}}$ می‌باشد. برای پیدا کردن دامنهٔ $f(x+1)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



دامنه: $x \geq 0$

دامنهٔ تابع $y = \frac{f^{-1}(x)}{f(x+1)}$ برابر اشتراک دامنهٔ f^{-1} و $f(x+1)$ است. به علاوه مخرج نباید صفر باشد.

$$(-\infty, 1] \cap [0, +\infty) - \{1\} = [0, 1)$$

از تفکیک کسر اول داریم:

$$\left[\frac{(n+1)^2 + 1}{n+1} \right] = \left[n+1 + \frac{1}{n+1} \right] = 7$$

پس $n+1 = 7$ و $n = 6$. بنابراین:

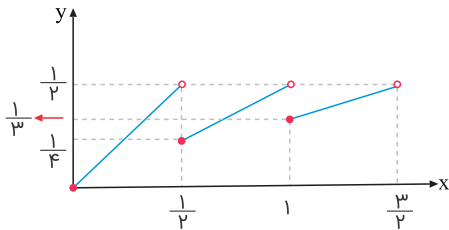
$$[\sqrt{10n-1}] = [\sqrt{59}] = [7/] = 7$$

جعبه ابزار: بازه‌بندی براکت
نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = \frac{x}{0+1} = x$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = \frac{x}{1+1} = \frac{x}{2}$$

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \leq 2x < 3 \Rightarrow y = \frac{x}{2+1} = \frac{x}{3}$$



باتوجه به شکل $a = \frac{3}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$ و ضرب آن‌ها برابر $\frac{3}{4}$ است.
چالش سوال: بازه‌بندی درست براکت

دو شرط زیر را بررسی می‌کنیم:
الف) باید رأس سهمی در بازه $(-2, +\infty)$ نباشد:

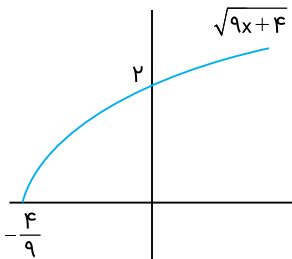
$$x_s = -\frac{a}{c} \leq -2 \Rightarrow a \geq 8$$

ب) ریشه سهمی هم نباید در $(-2, +\infty)$ باشد، یعنی به ازای $x = -2$ مقدار تابع مثبت باشد:

$$2(-2)^2 + a(-2) + 6 \geq 0 \Rightarrow -2a + 14 \geq 0 \Rightarrow 2a \leq 14 \Rightarrow a \leq 7$$

که اشتراک این دو شرط تهی است.

فرض کنیم $y = |2x - \alpha|$. می‌دانیم $y(0) = \alpha$ ؛ به‌طوری‌که اگر $\alpha = 2$ ، آن‌گاه در معادله $\sqrt{9x+4} = |2x - \alpha|$ ، ریشه‌های $x_1 = 0$ و $x_2 > 0$ ، جواب خواهند بود. برای آن‌که ۲ جواب مثبت داشته باشد، باید $\alpha > 2$ تا نمودار $y = |2x - \alpha|$ در ۲ نقطه با طول مثبت، نمودار $y = \sqrt{9x+4}$ را قطع کند.



تابع گویا، تابعی کسری است که در صورت و مخرج کسر آن، توابع چندجمله‌ای قرار می‌گیرند (البته مخرج کسر نباید صفر باشد). و می‌دانیم در یک تابع چندجمله‌ای، درجه جملات همگی عضو اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) هستند.

در گزینه "۱"، صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای از درجه ۱ هستند.

در گزینه "۲"، بعد از نوشتن $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[6]{x}$ ، باز هم صورت و مخرج هر دو، چندجمله‌ای از درجه ۱ می‌شوند.

در گزینه "۳"، در صورت، یک چندجمله‌ای از درجه ۱ داریم. اما در مخرج کسر بعد از نوشتن $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ ، از آنجا که $\frac{1}{4} \notin \mathbb{W}$ پس همین گزینه جواب تست است. ضمناً دقت کنید که گزینه "۴" را می‌توان به صورت $y = 3 = \frac{3}{1}$ نوشت که در آن، هم صورت و هم مخرج، چندجمله‌ای از درجه صفر محسوب می‌شوند.

جعبه ابزار:

۱- اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، آنگاه:

الف) $|A^m| = |A|^m \quad (m \in \mathbb{N})$

ب) $|kA_{n \times n}| = k^n |A| \quad (k \in \mathbb{R})$

۲- اتحادهای جبری در مجموعه ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشند، مگر آن‌که ماتریس‌ها، تعویض‌پذیر باشند.

۳- ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است.

$$(\mathcal{I}I - A)^{\mathcal{I}} \stackrel{\text{اتحاد}}{=} \mathcal{I}I - \mathcal{I}A + A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \underbrace{(I - A)}_{\text{طبق فرض } \mathcal{I}A^{\mathcal{I}}} + A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathcal{I}A^{\mathcal{I}}$$

$$\Rightarrow |(\mathcal{I}I - A)^{\mathcal{I}}| = |\mathcal{I}\mathcal{I}A^{\mathcal{I}}| \Rightarrow |\mathcal{I}I - A|^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathcal{I}|A^{\mathcal{I}}|$$

$$\Rightarrow |\mathcal{I}I - A|^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathcal{I}|A|^{\mathcal{I}} \xrightarrow{\text{جذر}} |\mathcal{I}I - A| = \pm \mathcal{I}\mathcal{I} \underbrace{|A|}_{\mathcal{I}} = \pm \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}$$

ابتدا A را در دو طرف رابطه اول ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} + A = \mathcal{I}I \xrightarrow{\times A} A^{-1}A + AA = \mathcal{I}IA \Rightarrow I + A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}A \Rightarrow A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}A - I$$

ماتریس $A^{\mathcal{I}}$ را سه بار در خودش ضرب می‌کنیم:

$$A^{\mathcal{I}} = (A^{\mathcal{I}})^{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}A - I)(\mathcal{I}A - I)(\mathcal{I}A - I) = (\mathcal{I}A - I)^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathcal{I}A^{\mathcal{I}} - \mathcal{I}\mathcal{I}A^{\mathcal{I}} + \mathcal{I}\mathcal{I}A - I \quad (*)$$

$$\Rightarrow A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}A - I \xrightarrow{\times A} A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}A^{\mathcal{I}} - A = \mathcal{I}(\mathcal{I}A - I) - A \Rightarrow A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathcal{I}A - \mathcal{I}I$$

$$\xrightarrow{(*)} A^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{I}\mathcal{I}A - \mathcal{I}I) - \mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{I}A - I) + \mathcal{I}\mathcal{I}A - I \Rightarrow \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}A - \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}I = mA + nI$$

$$\Rightarrow (m, n) = (\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}, -\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I})$$

جعبه ابزار: دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B را وارون یکدیگرند، هرگاه $AB = BA = I$.

$$A^{\mathcal{I}} + A^{\mathcal{I}} = I - A^{\mathcal{I}} \Rightarrow A^{\mathcal{I}} + A^{\mathcal{I}} + A^{\mathcal{I}} = I$$

$$\Rightarrow A^{\mathcal{I}}.(A^{\mathcal{I}} + A + I) = I \Rightarrow A^{\mathcal{I}} + A + I = (A^{\mathcal{I}})^{-1}$$

$$\Rightarrow (A^{\mathcal{I}})^{-1} + \mathcal{I}I = A^{\mathcal{I}} + A + I + \mathcal{I}I = A^{\mathcal{I}} + A + \mathcal{I}\mathcal{I}$$

برای به دست آوردن ماتریس X ، باید وارون ماتریس‌های سمت چپ و سمت راست X را از چپ و راست ضرب کنیم تا X تنها شود.

$$\text{نکته: } IX = X, A^{-1}A = I$$

$$\text{نکته: } XI = X, BB^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_A X \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^{-1}} -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = XB \Rightarrow -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = XB$$

$$\xrightarrow[\text{از راست}]{\times B^{-1}} X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین، مجموع تمام آرایه‌های ماتریس X ، برابر است با:

$$3 + 1 + (-2) + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

جعبه ابزار: وارون ماتریس 2×2 عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{بر حسب سطر اول} \Rightarrow (2) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_2 - (3) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}_{-9} + (x) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{-5} = \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}_{5x+1}$$

$$\Rightarrow 4 + 27 - 5x = 5x + 1 \Rightarrow 10x = 30 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین ماتریس موردنظر عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

و لذا وارون آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{9} & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{6}{9} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} -\frac{1}{9}$$

$$|A| = 5|A| + 8|A|^2 \xrightarrow{|A|^2 = |A|^2} 8|A|^2 + 4|A| = 0 \Rightarrow 4|A|(2|A| + 1) = 0 \Rightarrow |A| = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \checkmark \\ 0 & \times \end{cases}$$

در صورت سؤال ذکر شده است که A ، ماتریسی وارون‌پذیر می‌باشد؛ در نتیجه، $|A| = 0$ است و داریم:

$$|A| = -\frac{1}{2}$$

$$||A|B|^2 = |A|^3|B|^2 = |A|^3|B|^2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) - 3(-2 - 9) = 32$$

دقت شود که ماتریس B را نسبت به سطر دوم آن بسط دادیم.

$$|A|^3|B|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3(32)^2 = -2^{-3} \times 2^{10} = -2^7 = -128$$

جعبه ابزار: اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر هم‌مرتبه باشند، آنگاه:

الف) $(A^{-1})^{-1} = A$

ب) $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

پ) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1} \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq 0)$

ابتدا عبارت داده‌شده را برابر M در نظر بگیریم، سپس M^{-1} را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} M^{-1} &= (A^{-1} \times (A^{-1} + B^{-1})^{-1} \times B^{-1})^{-1} \\ &= (B^{-1})^{-1} \times ((A^{-1} + B^{-1})^{-1})^{-1} \times (A^{-1})^{-1} \\ &= B \times (A^{-1} + B^{-1}) \times A = (BA^{-1} + BB^{-1}).A \\ &= B \underbrace{A^{-1}.A}_I + \underbrace{BB^{-1}}_I.A = B + A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I_2 \end{aligned}$$

بنابراین $M^{-1} = 5I_2$ ، پس:

$$M = (5I_2)^{-1} = \frac{1}{5}I_2$$

در ابتدا، رابطه را ساده می‌کنیم:

$$I - 2B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2B^{-1}A^{-1} = I - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}_C A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

برای به‌دست آوردن A^{-1} ، وارون ماتریس C را از چپ ضرب می‌کنیم:

$$C^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{از چپ}]{\times C^{-1}} A^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

حال، ماتریس B را به‌دست می‌آوریم:

$$B = (B^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

در نهایت، ماتریس $4A^{-1} - 10B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$4A^{-1} - 10B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 8 + 4 + (-4) + 6 = 14$$

ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را می‌یابیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = A^2 \times A^2$$

$$\Rightarrow A_{33}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

جعبه ابزار: اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، آنگاه:

الف) $|A^m| = |A|^m \quad (m \in \mathbb{N})$

ب) $|kA_{n \times n}| = k^n |A| \quad (k \in \mathbb{R})$

پ) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$2I - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |2I - A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-4) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}_{-3} - (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_0 = -12$$

اگر قرار دهیم $2I - A = B$ ، آنگاه مطلوب مسئله، یافتن $|3(B^2)^{-1}|$ است و داریم:

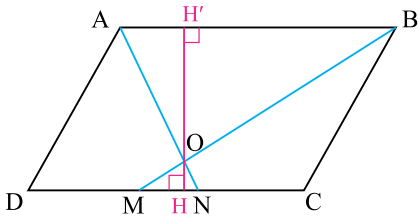
$$|3(B^2)^{-1}|_{3 \times 3} = 3^3 |(B^2)^{-1}| = 3^3 \times \frac{1}{|B^2|} = 3^3 \times \frac{1}{|B|^2} = 3^3 \times \frac{1}{(-12)^2} = \frac{3}{16}$$

باتوجه به اینکه نسبت تشابه نمی‌تواند برابر با ۱ باشد، یکی از دو حالت زیر برای نوشتن نسبت تشابه رخ می‌دهد:

۱) $\frac{x}{5} = \frac{y}{12} = \frac{5}{13} \Rightarrow x = \frac{25}{13}, y = \frac{60}{13} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = x + y + 5 = \frac{150}{13}$

۲) $\frac{x}{5} = \frac{5}{12} = \frac{y}{13} \Rightarrow x = \frac{25}{12}, y = \frac{65}{12} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = x + y + 5 = \frac{150}{12} = 12.5$

پس بیشترین محیط مثلث برابر با 12.5 است.



$$OH = h, \quad MN = x$$

$$\triangle AOB \sim \triangle MON \Rightarrow OH' = \Delta h \Rightarrow S_{ABCD} = \Delta x \times \Delta h = 3 \cdot xh$$

$$\begin{cases} S_{\triangle BCM} = \frac{3x \times \Delta h}{2} = 9xh \\ S_{\triangle AOB} = \frac{\Delta h \times \Delta x}{2} = 12.5xh \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{OBCN}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{S_{\triangle BCM} - S_{\triangle MON}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{9xh - \frac{xh}{2}}{12.5xh} = \frac{17/2}{12.5} = 0.68$$

جعبه ابزار: هرگاه دو n ضلعی متشابه باشند، آنگاه نسبت مساحت‌های آن‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

فرض می‌کنیم S_1 مساحت هفت ضلعی اول و S_2 مساحت هفت ضلعی دوم باشد و طول ضلع هفت ضلعی اول x و طول ضلع متناظر با هفت ضلعی اول در هفت ضلعی دوم y باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

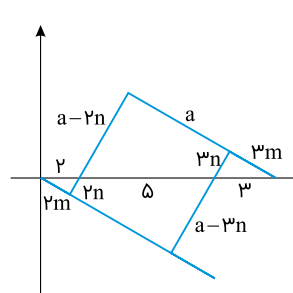
اگر $x = 5$ باشد آنگاه:

$$\frac{x}{y} = k \Rightarrow \frac{5}{y} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

اگر $y = 5$ باشد، آنگاه:

$$\frac{x}{y} = k \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

چالش سوال: دانش‌آموز فقط به دنبال پیدا کردن یک ضلع هفت ضلعی است و توجه نمی‌کند که صورت سؤال مشخص نکرده که کدام هفت ضلعی طول ضلع ۵ دارد.



$$\text{تشابه: } \frac{2n}{a - 2n} = \frac{2}{\lambda} = \frac{2m}{a + 2m} \Rightarrow \frac{n}{a - 2n} = \frac{1}{\lambda} = \frac{m}{a + 2m}$$

$$\frac{2n}{a - 2n} = \frac{2}{\lambda} = \frac{2m}{2m + a} \Rightarrow \frac{n}{a - 2n} = \frac{1}{\lambda} = \frac{m}{2m + a}$$

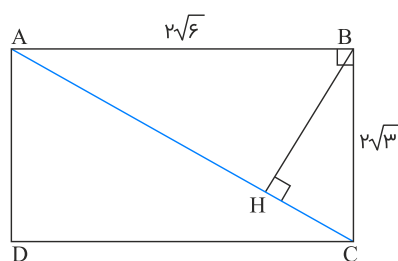
$$\frac{a - 2n}{\lambda} = \frac{a - 2m}{\lambda} \Rightarrow a = 2n$$

$$m^2 + n^2 = 1$$

$$\frac{a + 2m}{\lambda} = \frac{2m + a}{\lambda} \Rightarrow a = 2m$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2\lambda} + \frac{a^2}{2\lambda} = 1 \Rightarrow 2a^2 = 2\lambda \Rightarrow a^2 = \lambda \Rightarrow a = \sqrt{\lambda}$$

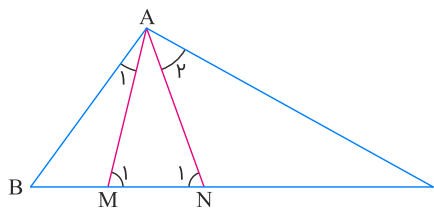
مستطیل ABCD را در نظر می‌گیریم. فاصله هر رأس مانند B از قطر مقابل، همان ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 24 + 12 = 36 \Rightarrow AC = 6$$

$$AB \cdot BC = AC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow BH = 2\sqrt{2}$$

زوایای M_1 و N_1 باهم برابرند، زیرا:

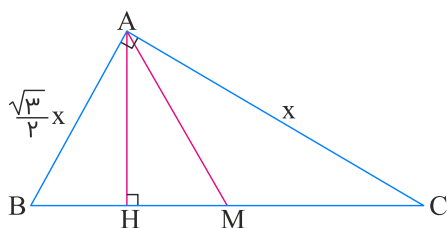


$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM : \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} \\ \triangle ACN : \hat{N}_1 = \hat{A}_r + \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow[\hat{A}_r = \hat{B}]{\hat{A}_1 = \hat{C}} \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \Rightarrow AM = AN$$

حال از تشابه دو مثلث ABM و ACN ($\hat{A}_r = \hat{B}$, $\hat{A}_1 = \hat{C}$) طول AM را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{NC} = \frac{BM}{AN} \Rightarrow AM \times AN = BM \times NC \\ AM = AN \end{array} \right\} \Rightarrow AM^2 = BM \times NC \Rightarrow AM = \sqrt{3 \times 4} \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:



$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + x^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x \times x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x$$

ازطرفی طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC نیز خواهیم داشت:

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = BH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow BH = \frac{3}{2\sqrt{3}}x$$

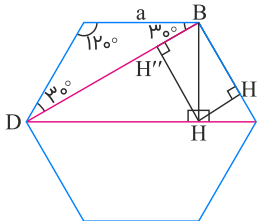
$$BM = BH + HM \Rightarrow HM = BM - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{2\sqrt{3}}x = \frac{1}{4\sqrt{3}}x$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMH}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}AH \cdot HM} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \times x}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x \times \frac{1}{4\sqrt{3}}x} = 12$$

مثلث‌های OAB و ODC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} OA \times OD = OB \times OC = \lambda$$

باتوجه به شکل می‌بایست نسبت $\frac{HH'}{HH''}$ را محاسبه کنیم:



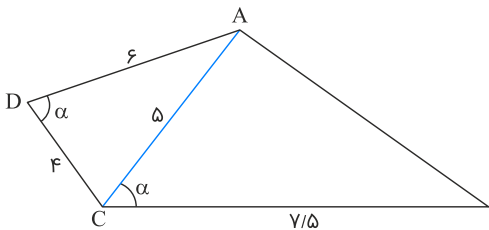
باتوجه به اندازه زوایای داخلی شش ضلعی منتظم، می‌توان دریافت که مثلث BCD قائم‌الزاویه بوده و ارتفاع BH ، ارتفاع وارد $\triangle BCD$ بر وتر آن می‌باشد. پس مثلث‌های BCH و BDH به حالت دو زاویه متشابه‌اند: ($\angle BHC = \angle BHD = 90^\circ$ و $\angle BCH = \angle BDH$)

باتوجه به اینکه نسبت ارتفاع‌های متناظر دو مثلث متشابه با نسبت اضلاع آن‌ها برابر است، داریم:

$$\triangle BCH \sim \triangle BDH \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{BC}{BD} \xrightarrow{BC=a, BD=a\sqrt{3}} \frac{HH'}{HH''} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

یادآوری: طول قطر کوچک شش ضلعی منتظمی به ضلع a برابر با $a\sqrt{3}$ است.

مثلث‌های ABC و ACD به حالت دو ضلع و زاویه بین متشابه‌اند، زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} \angle ADC = \angle ACB = \alpha \\ \frac{AD}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \sim \triangle ACD$$

حال باتوجه به نسبت تشابه داریم:

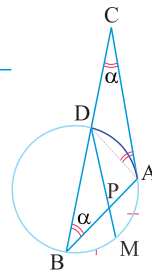
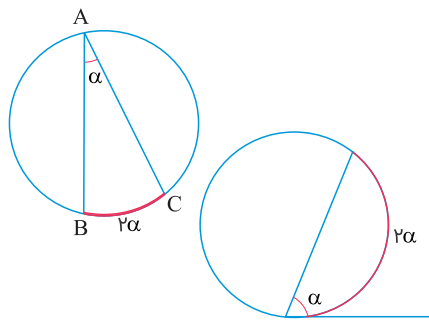
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{5}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

جعبه ابزار:

۱- اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان روبه‌رویش است.

۲- اندازه هر زاویه ظلّی (زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش، وتری از دایره است)، برابر با نصف کمان روبه‌رویش است.

باتوجه به فرض داده‌شده، داریم:



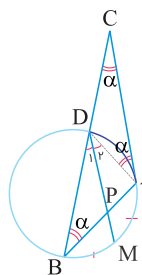
$$\triangle ABC : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad (*)$$

ازطرفی چون زاویه $\hat{B}$ محاطی روبه‌رو به کمان $\widehat{AD}$ است، پس با فرض $\hat{B} = \alpha$ درمی‌یابیم که $\widehat{AD} = 2\alpha$ می‌باشد. اما اندازه زاویه ظلّی $\widehat{DAC}$ نیز برابر با نصف کمان روبه‌رو، یعنی $\frac{\widehat{AD}}{2}$ است، پس:

$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{DAC} = \hat{B}$$

$$\xrightarrow{(*)} \widehat{DAC} = \hat{C} \Rightarrow \triangle DAC : DA = DC$$

حال باتوجه به زاویه خارجی $\widehat{BDA}$ برای مثلث $\triangle DAC$ ، نتیجه می‌گیریم که:



$$\widehat{BDA} = \hat{C} + \widehat{DAC} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

باتوجه به اینکه نقطه M وسط کمان $\widehat{AB}$ است، پس DM ، نیمساز زاویه محاطی $\widehat{BDA}$ محسوب می‌شود و لذا $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \alpha$ و درنتیجه مثلث PBD متساوی‌الساقین و $PB = PD$ است.

چالش سؤال: ممکن است نقطه P ، که نقطه برخورد دو وتر متقاطع درون دایره است، روابط طولی را یادآوری نماید.

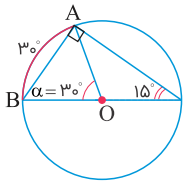
جعبه ابزار:

۱- در دایره به شعاع R :الف) طول کمان نظیر زاویه مرکزی α برابر است با: $\frac{\pi R}{180^\circ} \alpha$ ب) مساحت قطاع نظیر زاویه مرکزی α برابر است با: $\frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha$ ۲- در هر مثلث قائم‌الزاویه، که یک زاویه ۱۵ درجه دارد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر، برابر با $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.

باتوجه به فرض‌های داده شده داریم:

$$\begin{cases} S_{AOB \text{ قطاع}} = \pi \Rightarrow \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha = \pi \Rightarrow R^2 \alpha = 360^\circ \\ L_{\widehat{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \Rightarrow \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \Rightarrow R \alpha = 60^\circ \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} R = 2\sqrt{3}$$

پس قطر دایره، $BC = 4\sqrt{3}$ است و باتوجه به $R\alpha = 60^\circ \sqrt{3}$ ، درمی‌یابیم $\alpha = 30^\circ$ ، پس $\widehat{AB} = 30^\circ$ و اندازه زاویه محاطی $\widehat{C}$ برابر با 15° است. توجه کنید که مثلث ABC ، در رأس A ، قائم‌الزاویه می‌باشد، زیرا زاویه محاطی A ، روبرو به قطر BC است، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، که یک زاویه ۱۵ درجه دارد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است، پس:

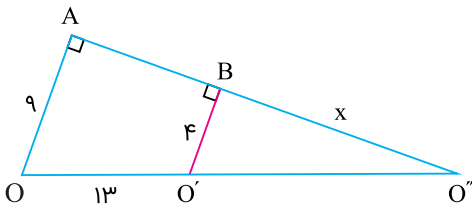


$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} BC \right) \cdot BC = \frac{1}{8} BC^2 = \frac{1}{8} (4\sqrt{3})^2 = 6$$

$d = R + R' = 13$: دو دایره، مماس خارج‌اند

$$S - S' = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi(R + R')(R - R') = 65\pi \Rightarrow R - R' = 5$$

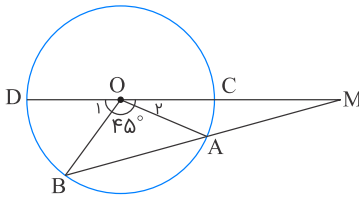
$$\Rightarrow \begin{cases} R + R' = 13 \\ R - R' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \\ R' = 4 \end{cases}$$



$$AB = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\text{طبق قضیه تالس: } \frac{x}{x + 13} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 9/6$$

$$O'' = 9/6 + 13 = 21/6$$



$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + 45 = 180 \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 135 \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{AC} = 135^\circ$$

$$\widehat{BD} + \widehat{CA} = 135^\circ$$

$$\widehat{AB} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{CA}}{2} = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BD} + \widehat{CA} = 135^\circ \\ \widehat{BD} - \widehat{CA} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\widehat{BD} = 225^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 112.5^\circ$$

چون مماس مشترک غیرخارجی M را قطع می‌کند، پس MT بر دو دایره مماس است. حال می‌توانیم برای دو دایره بنویسیم:

$$MA \times MB = MT^2 = MA' \times MB'$$

پس دو عبارت همواره باهم برابرند.

جعبه ابزار:

(۱) اعداد ۳ و ۴ و ۵ و مضارب آن‌ها اعداد فیثاغورس هستند.

(۲) مرکز دایره محیطی هر مثلث، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع آن مثلث است و مرکز دایره محیطی هر مثلث قائم‌الزاویه دقیقاً وسط وتر است.

(۳) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه، رأس زاویه قائمه است.

(۴) اگر اضلاع یک زاویه با اضلاع زاویه دیگر موازی باشد، آن دو زاویه باهم برابر (یا مکمل) اند.

(۵) در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

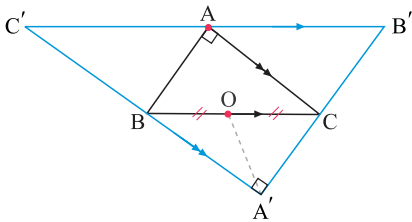
باتوجه به جعبه ابزار، مطابق (۱) مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مطابق (۲) نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع آن، بر نقطه O وسط وتر BC منطبق است.

یعنی نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌باشد. از آنجایی که $A'B' \parallel AB$ و $A'C' \parallel AC$ ، پس طبق (۴) $\hat{A}' = \hat{A} = 90^\circ$ ، و درنتیجه مثلث

$A'B'C'$ قائم‌الزاویه می‌باشد و طبق (۳) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های آن، همان رأس A' است، پس مطلوب مسئله، اندازه پاره خط $A'O$ می‌باشد و چون $A'O$

میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه $A'BC$ است، پس طبق (۵) داریم:

$$A'O = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

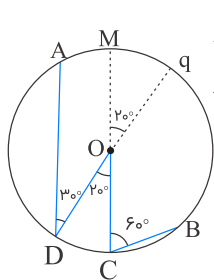


می‌دانیم اگر دو وتر در دایره موازی باشند، کمان‌های محصور بین آن‌ها با یکدیگر مساوی‌اند، پس $\widehat{AD} = \widehat{BC}$. حال داریم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{AB}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{DC} - \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\widehat{DC} + \widehat{AB} = 360^\circ - 2 \times \widehat{BC} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

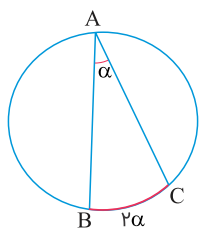
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DC} - \widehat{AB} = 60^\circ \\ \widehat{DC} + \widehat{AB} = 240^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2\widehat{DC} = 300^\circ \Rightarrow \widehat{DC} = 150^\circ, \widehat{AB} = 90^\circ$$



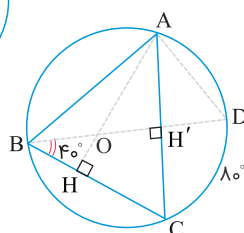
$$\widehat{Aq} = 60^\circ, \quad \widehat{BM} = Bq + Mq = 120^\circ$$

$$\widehat{AB} = \widehat{Aq} + \widehat{BM} - \widehat{Mq} = 60 + 120 - 20 = 160^\circ$$

جعبه ابزار: اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان روبه‌رویش است.



چون نقطه O، نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس BH' ارتفاع وارد بر ضلع AC محسوب می‌شود و در نتیجه $\hat{H}' = 90^\circ$. از طرفی داریم:



$$\widehat{H'BC} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \quad (\text{محاطی})$$

$$\Rightarrow \triangle BH'C : (\hat{B} = 40^\circ, \hat{H}' = 90^\circ) \Rightarrow \hat{C} = 50^\circ \xrightarrow{\text{محاطی}} \widehat{AB} = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AHC : (\hat{C} = 50^\circ, \hat{H} = 90^\circ) \Rightarrow \hat{A} = 40^\circ$$

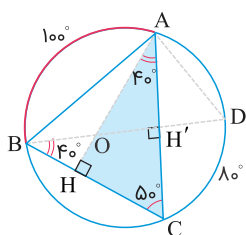
$$\Rightarrow \triangle AOH' : (\hat{A} = 40^\circ, \hat{H}' = 90^\circ) \Rightarrow \angle AOD = 50^\circ$$

در ضمن باتوجه‌به محاطی بودن زاویه $\widehat{BDA}$ ، داریم:

$$\widehat{BDA} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

پس:

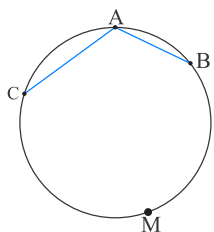
$$\angle AOD + \angle ADO = 100^\circ$$



$$\widehat{AC} = \frac{360}{5} = 72^\circ, \quad \widehat{AB} = \frac{360}{10} = 36^\circ$$

$$\widehat{BMC} = 360 - 36 - 72 = 252^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{252}{2} = 126^\circ$$



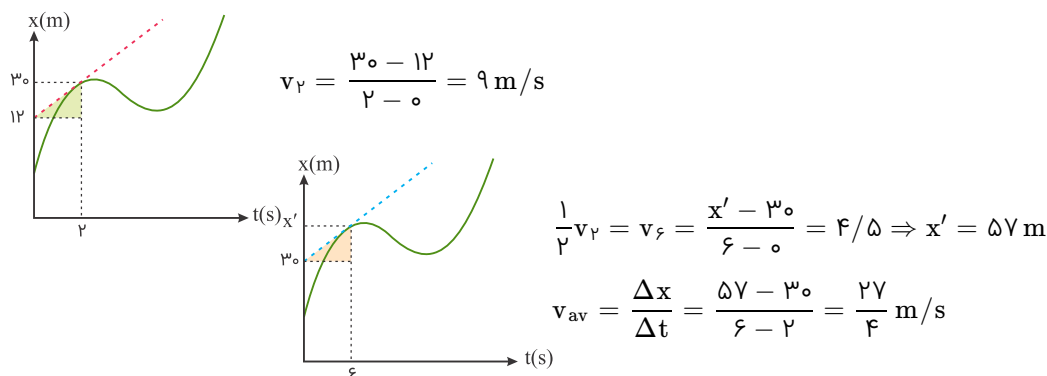
گزینه ۲

۷۱

ابتدا متحرک در Xهای مثبت قرار دارد و به سمت Xهای منفی حرکت می‌کند. در Xهای منفی تغییر جهت می‌دهد و دوباره به سمت Xهای مثبت حرکت می‌کند. پس از مدتی طی مسافت در Xهای مثبت، تغییر جهت می‌دهد و در (x = ۰) متوقف می‌شود.

گزینه ۳

۷۲



گزینه ۳

۷۳

نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط در کل بازه زمانی حرکت، همان نسبت مسافت به جابجایی است.

$$\Delta x = x_{\text{آخر}} - x_{\text{اول}} = 0 - 6 = 6$$

$$\text{مسافت} = |\Delta x_{0-3t}| + |\Delta x_{3t-6t}| = |-3 - 6| + |0 - (-3)| = 9 + 3 = 12$$

پس پاسخ $\frac{12}{-6} = -2$ خواهد بود.

گزینه ۲

۷۴

دانستن مفهوم شتاب و $v = at + v_0$

$$v = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$$

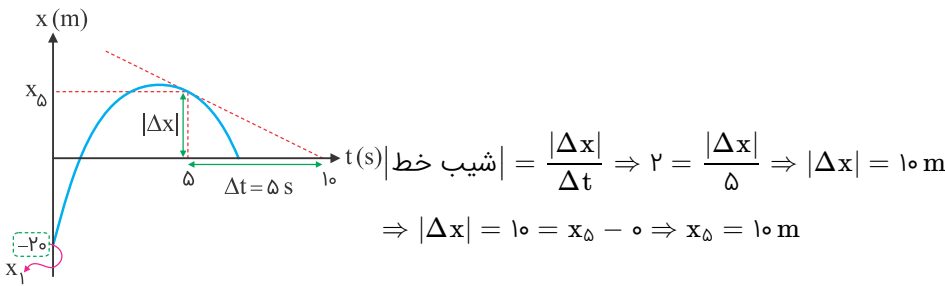
$$v = at + v_0 \Rightarrow 40 = a \times 8 \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

$$a' = a + \frac{25}{100}v \Rightarrow a' = 5 + \frac{25}{100} \times 40 = 15 \text{ m/s}^2$$

$$v' = a't + v_0 \Rightarrow 80 = 15 \times t + 40$$

$$\Rightarrow 40 = 15t \Rightarrow t = 2/3 \text{ s}$$

تندی لحظه‌ای هم‌اندازه با شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان می‌باشد در نتیجه شیب خط مماس بر منحنی در لحظه $t = ۵ \text{ s}$ برابر با ۲ m/s است، به کمک همین نکته می‌توانیم مکان متحرک در لحظه $t = ۵ \text{ s}$ را محاسبه کنیم:



حالا سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_5 - x_1}{\Delta t} = \frac{x_5 - (-۲۰ \text{ m})}{\Delta t = ۵ \text{ s}} \rightarrow v_{av} = \frac{۱۰ - (-۲۰)}{۵} = ۶ \text{ m/s}$$

چون نقاط ابتدا به هم نزدیک و سپس دور می‌شوند؛ بنابراین سرعت متحرک از یک مقدار زیاد ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود، یعنی شیب نمودار مکان- زمان ابتدا زیاد بوده و سپس کم شده و دوباره زیاد می‌شود؛ یعنی گزینه ۳ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: شتاب، تغییرات سرعت نسبت به زمان است. پس صفر بودن شتاب به معنای عدم تغییر سرعت است، نه صفر بودن سرعت.

گزینه ۲: باتوجه به تعریف شتاب، برای محاسبه آن، سرعت جسم در دو زمان مختلف بررسی می‌شود. پس ممکن است سرعت در یک لحظه صفر باشد و لحظه پس از آن صفر نباشد. به این ترتیب، شتاب داریم، اما سرعت در آن لحظه صفر بوده است. مانند توقف لحظه‌ای یک توپ در نقطه اوج.

گزینه ۳: اگر مسیر حرکت منحنی باشد، حتی اگر اندازه سرعت ثابت باشد، جهت سرعت تغییر می‌کند و به این ترتیب حرکت شتاب‌دار است.

گزینه ۴: بردار شتاب متحرک در جهت بردار تغییرات سرعت است و الزاماً با سرعت، هم‌جهت نیست.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{t_1 + t_2} = \frac{\Delta x_1 + v_2 t_2}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + t_2} = \frac{k + ۲k}{\frac{k}{۲} + ۲} = \frac{۶k}{k + ۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۶k}{k + ۴} = k - ۴ \Rightarrow k^2 - ۱۶ = ۶k \Rightarrow k^2 - ۶k - ۱۶ = (k - ۸)(k + ۲) = ۰ \Rightarrow k = ۸$$

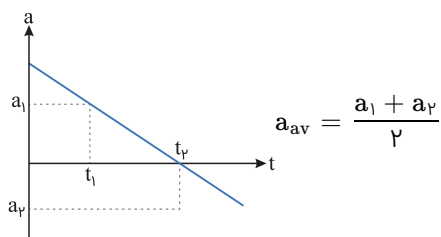
جابه‌جایی این متحرک در کل برابر است با:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = ۸ + ۲ \times ۸ = ۲۴$$

ارتباط بین شتاب و سرعت (شتاب، مشتق سرعت می‌باشد).

$$v_{av,1,2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ رابطه مقدار متوسط:}$$

نمودار سرعت - زمان اگر سهمی باشد، نمودار شتاب - زمان آن، (مشتق آن) خط راست شیب‌دار می‌باشد.

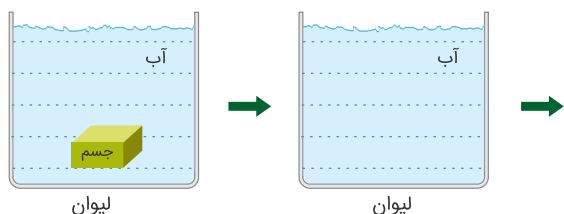


درک ارتباط سرعت و شتاب و دانستن نحوه متوسط گیری لازم است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(-2\sqrt{3}\vec{i} - 2\vec{j}) - 4\vec{j}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{-2\sqrt{3}\vec{i} - 6\vec{j}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = -2\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \sqrt{4 + 12} = 4 \text{ m/s}^2$$

ابتدا جرم لیوان و جسم برابر ۶۰۰ گرم شده و چون لیوان ۲۰۰ گرم است پس جسم ۴۰۰ گرم می‌شود و در حالت بعد آب اضافه می‌شود و مجموعه به ۸۰۰ گرم می‌رسد پس ۲۰۰ گرم آب داشتیم، در حالت بعدی جسم خارج شده و به جای آن هم آب داریم یعنی حجم جسم را آب پر کرده است.



$$\Rightarrow m_{\text{لیوان}} + m_{ab} = 600 \text{ (gr)} \Rightarrow m_{\text{آب}} = 400 \text{ (gr)}$$

پس جرم آبی که جایگزین جسم شده است برابر ۲۰۰ گرم خواهد بود:

$$\begin{array}{c} \text{جرم آب اضافه شده} \\ \uparrow 400 \\ \text{جرم آب جدید} \\ \uparrow 200 \\ \text{جرم آب حالت قبل} \\ \downarrow 200 \end{array} = 200$$

و حجم آن برابر:

$$V = \frac{m}{\rho_{\text{آب}}} = \frac{200}{1} = 200 \text{ (cm}^3\text{)}$$

که این همان حجم جسم نیز می‌باشد پس حجم کل جسم برابر ۲۰۰ cm^۳ است.
حال با استفاده از چگالی ماده سازنده جسم، حجم ماده جسم را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{\text{ماده}} = \frac{m_{\text{ماده}}}{V_{\text{ماده}}} \Rightarrow \rho = \frac{400}{V_{\text{ماده}}} \Rightarrow V_{\text{ماده}} = 80 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{کل جسم}} - V_{\text{ماده}} = 200 - 80 = 120 \text{ (cm}^3\text{)}$$

ابتدا ابعاد استخر را بر حسب cm تبدیل می‌کنیم:

$$۵۰ \text{ ذرع} \times \frac{۱۰۴ \text{ cm}}{۱ \text{ ذرع}} = ۵/۲ \times ۱۰^۳ \text{ cm}$$

$$۲۴۰ \text{ in} \times \frac{۲/۵ \text{ cm}}{۱ \text{ in}} = ۶ \times ۱۰^۲ \text{ cm}$$

$$۲۵ \text{ یارد} \times \frac{۳ \text{ فوت}}{۱ \text{ یارد}} \times \frac{۱۲ \text{ in}}{۱ \text{ فوت}} \times \frac{۲/۵ \text{ cm}}{۱ \text{ in}} = ۲/۲۵ \times ۱۰^۳ \text{ cm}$$

حال حجم استخر را به دست می‌آوریم:

$$V = ۵/۲ \times ۱۰^۳ (\text{cm}) \times ۶ \times ۱۰^۲ (\text{cm}) \times ۲/۲۵ \times ۱۰^۳ (\text{cm}) = ۷/۰۲ \times ۱۰^۹ \text{ cm}^۳$$

$$\frac{\text{حجم } V}{\text{زمان } t} = \text{آهنگ حجمی خالی شدن آب استخر}$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۱۰^۵ \text{ cm}^۳/\text{s} = \frac{۷/۰۲ \times ۱۰^۹ \text{ cm}^۳}{t} \Rightarrow t = ۳/۵۱ \times ۱۰^۴ \text{ s} \times \frac{۱ \text{ h}}{۳۶۰۰ \text{ s}} = ۹/۷۵ \text{ h}$$

وقتی گلوله رها می شود عاملی که آن را به طرف پائین به حرکت درمی‌آورد وزن گلوله است. لذا با فرض چشم‌پوشی از وزن گلوله، حرکت رو به پائین آن را نمی توان توضیح داد. از مواردی نظیر ابعاد گلوله و چرخش گلوله و مقاومت هوا می توان صرف نظر کرد.

دقت هریک از وسیله‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱) ۸/۰۱ \text{ kg} \Rightarrow \text{دقت} = ۰/۰۱ \text{ kg} = ۱۰ \text{ g}$$

$$۲) ۸۰۱۰ \text{ g} \Rightarrow \text{دقت} = ۱ \text{ g}$$

$$۳) ۸۰/۱ \times ۱۰^۳ \text{ g} \Rightarrow \text{دقت} = ۰/۱ \times ۱۰^۳ = ۱۰۰ \text{ g}$$

$$۴) ۸/۰۱۰ \times ۱۰^۴ \text{ mg} \Rightarrow \text{دقت} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^۴ \times ۱۰^{-۳} \text{ g} = ۰/۰۱ \text{ g}$$

بنابراین دقت اندازه‌گیری (۴) از سایر گزینه‌ها بیشتر است.

استفاده از فرمول چگالی مخلوط:

$$\rho = \frac{m_A + m_B}{\underbrace{V_A + V_B}_{\text{حجم کل قبل مخلوط کردن}} - \underbrace{\Delta V}_{\text{تغییر حجم}}}$$

در مرحله اول چگالی مخلوط حالت اول را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{می‌دانیم } \rho_1 = \frac{m}{V} \text{ پس:}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B - \Delta V} \\ &= \frac{\rho_A V_A + \rho_B V_B}{\frac{9}{10} V_t} = \frac{\rho_A \times \frac{1}{2} V_t + \rho_B \times \frac{1}{2} V_t}{\frac{9}{10} V_t} \\ &= \frac{\frac{\rho_A + \rho_B}{2}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9} (\rho_A + \rho_B) \end{aligned}$$

حال چگالی مخلوط در حالت دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{m_A + m_B}{V_t - \Delta V} = \frac{\rho_A \left(\frac{1}{2} V_t\right) + \rho_B \left(\frac{3}{4} V_t\right)}{\frac{1}{10} V_t} \\ &= \frac{\left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{2}\right) V_t}{\frac{1}{10} V_t} = \frac{5}{2} (\rho_A + 3\rho_B) \end{aligned}$$

$$\rho_2 = \frac{3}{4} \rho_1 \text{ طبق صورت سؤال داریم:}$$

پس:

$$\frac{5}{16} (\rho_A + 3\rho_B) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} (\rho_A + \rho_B) \Rightarrow \rho_A = 5\rho_B$$

$$\left. \begin{array}{l} g \Rightarrow m/s^2 \\ M \Rightarrow kg \\ r \Rightarrow m \end{array} \right\} \frac{m}{s^2} = ? \frac{kg}{m^2} \Rightarrow ? = \frac{m^3}{kgs^2}$$

پاسخ سؤال ۸۷

کمیت‌های مساحت، قد شخص، تندی و فشار، نرده‌ای بوده و بقیه برداری هستند.

باتوجه به داده‌های سوال داریم:

$$\text{جرم بطری} = ۲۶۵ \text{ g}$$

$$۶۱۵ \text{ g} = \text{جرم (بطری + ساچمه‌ها)}$$

$$\text{جرم ساچمه‌ها} = ۶۱۵ - ۲۶۵ = ۳۵۰ \text{ g}$$

$$۹۷۰ \text{ g} = \text{جرم (آب + ساچمه‌ها + بطری)}$$

$$۳۵۵ \text{ g} = ۹۷۰ - ۶۱۵ = \text{جرم آب اضافه شده}$$

$$۴۹۵ \text{ g} = ۷۶۰ - ۲۶۵ = \text{جرم کل آب زمان خالی شدن ساچمه‌ها}$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \text{حجم آبی که بطری را پر می‌کند}$$

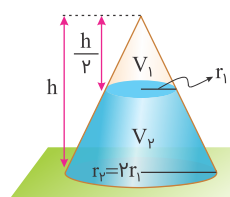
$$\Rightarrow V = \frac{۴۹۵}{۱} = ۴۹۵ \text{ cm}^3$$

$$۳۵۵ \text{ cm}^3 = \frac{۳۵۵}{\rho} = V = \text{حجم آب همراه ساچمه‌ها}$$

$$۱۴۰ \text{ cm}^3 = ۴۹۵ - ۳۵۵ = \text{حجم ساچمه‌ها}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۳۵۰}{۱۴۰} = ۲/۵ \text{ g/cm}^3 = \text{ساچمه‌ها}$$

در شکل زیر تا نیمی از ارتفاع مخروط از آب پر شده است. اگر حجم مخروط V باشد، داریم:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \times \frac{h_1}{h} = \left(\frac{r_1}{2r_1}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} V = \frac{1}{8} \times ۱۶۰ = ۲۰ \text{ cm}^3$$

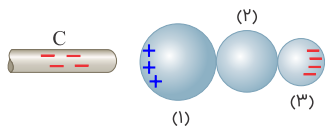
$$V_2 = V - V_1 = ۱۶۰ - ۲۰ = ۱۴۰ \text{ cm}^3$$

زمان (s)	حجم آب ورودی (cm^3)
۱	۵
t	۱۴۰

$$\Rightarrow ۵t = ۱۴۰ \Rightarrow t = ۲۸ \text{ s}$$

برای تعیین دقت ترازو، باید به کوچکترین واحدی که ترازو می‌تواند اندازه‌گیری کند توجه کنیم. در اینجا، عدد $۲/۹۲ \text{ kg}$ به صورت دو رقم اعشار گزارش شده است. این به این معناست که دقت ترازو تا $۰/۰۱ \text{ kg}$ است. از آنجا که درجه بندی ترازو مضارب ۱۰ می‌باشد، دقت ترازو در گرم برابر با ۱۰ g است.

با توجه به جدول سری داده شده در اثر مالش C با B بار C منفی می‌شود و اگر آن را به کره‌ها نزدیک کنیم بار نقاط ۱ و ۲ خنثی و بار نقطه ۳ منفی می‌شود.



گزینه ۲

۹۲

برای حل تست‌های ترکیبی حرکت‌شناسی و الکتریسیته ساکن معمولاً از قضیه کار-انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. مطابق این قضیه، کار برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر تغییر انرژی جنبشی آن است.

$$W_{\text{کل}} = \Delta K$$

در مرحله اول:

کار نیروی الکتریکی F_E در جابه‌جایی بار q و به اندازه d در راستای خطوط میدان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_E = F_E d \cos \theta = |q| E d \cos \theta$$

اگر بار به‌خودی‌خود رها شود و در جهت نیروی الکتریکی به حرکت درآید، آنگاه:

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow W_E = |q| E d$$

و در نهایت بر اساس رابطه‌های بالا داریم:

$$\begin{cases} W_{AB} = K_B - K_A \Rightarrow |q| E(\overline{AB}) = \frac{1}{2} m v_B^2 \\ W_{AM} = K_M - K_A \Rightarrow |q| E(\overline{AM}) = \frac{1}{2} m v_M^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \left(\frac{v_B}{v_M} \right)^2$$

$$\Rightarrow \gamma = \left(\frac{v_B}{v_M} \right)^2 \Rightarrow \frac{v_B}{v_M} = \sqrt{\gamma}$$

گزینه ۱

۹۳

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{36 \times 10^{-6}} = 10^7 \text{ N/C} = 10 \text{ MN/C}$$

گزینه ۱

۹۴

باتوجه به رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ، داریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{d_1}{\left(1 + \frac{\gamma_0}{100}\right) d_1} = \frac{5}{42} \Rightarrow C_2 = \frac{5}{42} C_1$$

$$\xrightarrow{C_2 < C_1, \Delta C < 0} C_2 - C_1 = -37 \mu\text{F} \Rightarrow \frac{5}{42} C_1 - C_1 = -37$$

$$-\frac{37}{42} C_1 = -37 \Rightarrow C_1 = 42 \mu\text{F}$$

گزینه ۱

۹۵

چون خط‌های میدان الکتریکی از q_1 خارج و به q_2 وارد می‌شوند، پس q_1 مثبت و q_2 منفی است. ازطرفی چون تراکم خط‌های میدان اطراف q_1 زیاده‌تر از q_2 است، پس $|q_1| > |q_2|$

ابتدا اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه را محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{۲۴۰}{۲ \times ۱۰^{-۳}} = ۱۲ \times ۱۰^۵ \frac{V}{m}$$

حال تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را در جابه‌جایی از نقطه A تا مجاورت صفحه مثبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta U = -E|q|d \cos \theta = -۱۲ \times ۱۰^۵ \times ۲ \times ۱۰^{-۶} \times ۱/۵ \times ۱۰^{-۳} \times \cos ۰ = -۳۶ \times ۱۰^{-۵} J = -۳۶۰ \mu J$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow{\text{ثابت: } d, A} \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\kappa_۲}{\kappa_۱} \xrightarrow{\substack{(هوا) \kappa_۱=۱, \kappa_۲=۲ \\ C_۱=۲ \mu F}} \frac{C_۲}{۲} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow C_۲ = ۴ \mu F$$

حال چون C و V معلوم هستند، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_۲ - U_۱ = \frac{1}{۲} C_۲ V^۲ - \frac{1}{۲} C_۱ V^۲ = \frac{1}{۲} V^۲ (C_۲ - C_۱) \\ &= \frac{1}{۲} \times (۲۴)^۲ (۴ - ۲) = ۵۷۶ \mu J \end{aligned}$$

چون بار الکتریکی یک جسم کوانتومی است، یعنی مضرب درستی از e است؛ پس طبق رابطه $|q| = ne$ باید $\frac{|q|}{e}$ عدد صحیح باشد.
گزینه ۱: بار الکتریکی یک جسم نمی‌تواند باشد.

$$\frac{|q_۱|}{e} = \frac{۲۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۱۳/۵ \notin \mathbb{N}$$

گزینه ۲: بار الکتریکی یک جسم می‌تواند باشد.

$$\frac{|q_۲|}{e} = \frac{۰/۵ \times ۱۰^{-۱۲}}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = \frac{۵}{۱۶} \times ۱۰^۷ = ۵ \times \left(\frac{۱۰^۴}{۱۶}\right) \times ۱۰^۳ = ۵ \times ۶۲۵ \times ۱۰^۳ \in \mathbb{N}$$

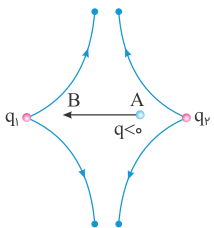
گزینه ۳: بار الکتریکی یک جسم می‌تواند باشد.

$$\frac{|q_۳|}{e} = \frac{۳۵/۲ \times ۱۰^{-۹}}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۲۲ \times ۱۰^{۱۰} \in \mathbb{N}$$

رسم خطوط میدان الکتریکی و نحوه تغییرات پتانسیل الکتریکی در میدان.

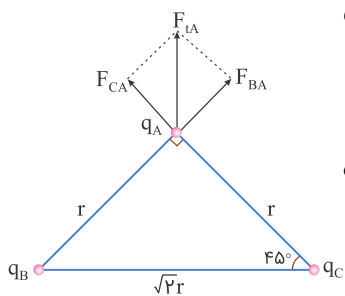
گام اول: ابتدا انرژی پتانسیل الکتریکی بار $q < ۰$ افزایش یافته است بنابراین در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شده است و سپس انرژی پتانسیل الکتریکی بار $q < ۰$ کاهش یافته بنابراین در خلاف جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شده است.
گام دوم: طبق توضیحات داده‌شده درمی‌یابیم که:

بنابراین الزاماً: $q_۱ > ۰$ و $q_۲ > ۰$



قانون کولن $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ و اصل برهم‌نهی نیروها

هر سه بار را مثبت فرض می‌کنیم (نوع بارها تأثیری در حل مسئله ندارد). فرض کنیم فاصله A تا B برابر r باشد در این صورت $r_{BA} = r_{CA} = r$ و $r_{BC} = \sqrt{2}r$ خواهد شد (زیرا مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است). با فرض



$$q_B = q_C : F_{CB} = k \frac{q_B q_C}{r_{BC}^2} = k \frac{q_B^2}{(\sqrt{2}r)^2}$$

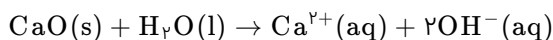
و چون $q_B = q_C$ و $r_{AB} = r_{AC}$ می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت $F_{CA} = F_{BA}$

$$F_{tA} = \sqrt{F_{CA}^2 + F_{BA}^2} = \sqrt{2} F_{BA} = \sqrt{2} k \frac{q_B q_A}{r^2}$$

و چون طبق فرض مسئله $F_{BC} = 2F_{tA}$ است داریم:

$$F_{BC} = 2F_{tA} \Rightarrow k \frac{q_B^2}{(\sqrt{2}r)^2} = 2 \times \sqrt{2} k \frac{q_B q_A}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_B}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} q_A \Rightarrow \frac{q_A}{q_B} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$



هر مول CaO ، ۳ مول یون ایجاد می‌کند؛ بنابراین ۳ مول از آن ۹ مول یون تولید می‌کند؛ پس در هر ۹ لیتر آب، ۹ مول یون وجود خواهد داشت و غلظت یون‌های تولیدشده ۱ مول بر لیتر می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: شیمی‌دان‌ها از جمله آرنیوس، قبل از توصیف علمی اسیدها و بازها، با برخی ویژگی‌ها و واکنش‌های بین این مواد آشنا بودند.

گزینه ۳: این عنصر یک نافلز (S) است و اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس محسوب می‌شوند.

گزینه ۴: نادرست؛ زیرا سرکه یک اسید است و در محلول‌های اسیدی $1 < \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{OH}^-]}$ یا $\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ است.

بررسی سایر عبارت‌ها:

الف) نادرست. ذرات سازندهٔ کلوئیدها توده‌های مولکولی هستند که اندازهٔ آن‌ها متفاوت است.

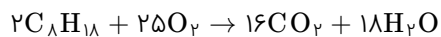
ب) نادرست. لکه‌های چربی با پارچه‌های پلی‌استری نیروی جاذبهٔ قوی‌تری ایجاد می‌کنند، اما این نیروی جاذبه از نوع بین مولکولی (واندروالسی) است.

عبارت اول: نادرست.

تعداد اتمهای روغن زیتون $C_{57}H_{104}O_6 = 167$ تعداد اتمهای وازلین $C_{25}H_{52} = 77$

$$77 \times 3 = 231 > 167$$

عبارت دوم: درست.



$$? g O_2 = 5/7 g C_8H_{18} \times \frac{1 \text{ mol } C_8H_{18}}{114 g C_8H_{18}} \times \frac{25 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } C_8H_{18}} \times \frac{32 g O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 20 g O_2$$

عبارت سوم: درست.

$$\underbrace{\frac{x}{60} \times 8}_{\text{اوره}} = \underbrace{\frac{5}{352} \times 77}_{\text{وازلین}} \Rightarrow 8/2 g \text{ اوره}$$

عبارت چهارم: نادرست. اتیلن گلیکول $C_2H_6O_2$ از سه نوع عنصر و اوره $CO(NH_2)_2$ از چهار نوع عنصر تشکیل شده است.

عبارت پنجم: نادرست. روغن زیتون از تعداد اتمهای بیشتری تشکیل شده است و جرم مولی روغن زیتون بیشتر از اتیلن گلیکول می‌باشد، پس مقاومت در مقابل جاری شدن (گرانروی) روغن زیتون بیشتر از اتیلن گلیکول است.

تعداد جفت الکترون پیوندی در آلکان‌ها برابر $3n + 1$ است.

$$C_{25}H_{52} \Rightarrow (25 \times 3) + 1 = 76$$

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست. آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

عبارت دوم: نادرست. آرنیوس روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد.

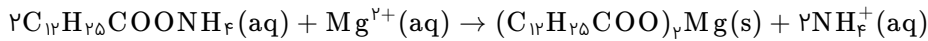
عبارت سوم: نادرست. شیمی‌دان‌ها پیش از اینکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، با واکنش‌ها و ویژگی‌های آن‌ها آشنا شدند.

عبارت چهارم: نادرست. یافته‌های آرنیوس نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای جریان برق‌اند.

نمودار امید به زندگی برای هر دو نواحی کم‌برخوردار و برخوردار صعودی است.

کلوئیدها ناهمگن هستند و ته‌نشین نمی‌شوند و برخلاف محلول‌ها نور را پخش می‌کنند.

واکنش انجام شده به صورت زیر است:



$$\begin{aligned} \text{صابون } g &= 157/5 \times \frac{1 \text{ mol رسوب}}{450 \text{ g رسوب}} \times \frac{2 \text{ mol صابون}}{1 \text{ mol رسوب}} \\ &\times \frac{231 \text{ g صابون}}{1 \text{ mol صابون}} \times \frac{100}{35} = 462 \text{ g صابون} \end{aligned}$$

عبارت‌های "ب" و "پ" درست هستند. محلول HA یک اسید قوی و محلول HB یک اسید ضعیف است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست. محلول HB یک الکترولیت ضعیف است.

ب) درست. محلول‌های HA و HB به ترتیب می‌توانند HI و HF باشند.

پ) درست. یونش اسیدهای ضعیف یک فرآیند تعادلی و یونش اسیدهای قوی یک‌طرفه و غیرقابل برگشت است.

ت) نادرست. سرعت واکنش اسید با فلز در شرایط یکسان به قدرت اسیدی (K_a) وابسته است؛ بنابراین سرعت واکنش محلول HA بیشتر است.

فقط مورد "پ" درست است.

بررسی موارد نادرست:

الف) بازها تلخ‌مزه هستند.

ب) اسید معده هیدروکلریک اسید است.

ت) اسیدها با اغلب فلزها واکنش می‌دهند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست. بین عناصر غالب این‌طور است وگرنه در زمین هم He و H و ... وجود دارد.

ب) نادرست. C و S_{۱۶}

پ) درست.

ت) درست. O_۸ در زمین جایگاه دوم و در مشتری جایگاه چهارم را دارد.

جعبه ابزار:

رسم آرایش الکترونی و شناخت اعداد کوانتومی اصلی و فرعی

$$31A : [18Ar]3d^{10} 4s^2 4p^1 : 2(4 + 0) + (4 + 1) = 13$$

$$23B : [18Ar] : 3d^0 4s^2 : 3(3 + 2) + 2(4 + 0) = 23$$

$$17C : [10Ne]/3s^2 3p^5 : 2(3 + 0) + 5(3 + 1) = 26$$

$$10D : [2He]/2s^2 2p^6 : 2(2 + 0) + 6(2 + 1) = 22$$

چالش سوال:

شناخت لایه ظرفیت و محاسبه مجموع $(n + l)$ الکترونی لایه ظرفیت

$$\underbrace{52 - P}_n - \underbrace{(P - 3)}_e = 7 \Rightarrow 2P = 48 \Rightarrow P = 24, n = 28$$

پس عنصر x , Cr می‌باشد.

الف) نادرست؛ $^{51}_{24}\text{Cr} : [\text{Ar}] 3d^5 4s^1$ شامل ۷ الکترون با $l = 0$ است.

ب) نادرست؛ عنصری از گروه ششم و دوره چهارم مشخصات خود کروم است!

پ) درست؛ $^{51}_{24}\text{Cr} \rightarrow 3d^5$ $^{51}_{24}\text{V} \rightarrow 3d^3$
۲ الکترون تفاوت

ت) درست؛ $^{51}_{24}\text{Cr} : 3d^5 4s^1$ / $^{51}_{29}\text{Cu} : 3d^{10} 4s^1$

الف) درست؛ متن کتاب درسی

ب) درست؛ متن کتاب درسی

پ) نادرست؛ افزایش جنبش گازها در تضاد با کاهش دما و تراکم آنهاست.

ت) درست؛ تبدیل هیدروژن به هلیوم مورد بحث است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست. $\frac{92}{118} \times 100 \simeq 78$

گزینه ۲: نادرست. بخار سدیم $\leftarrow$ زرد لامپ نئون $\leftarrow$ سرخ

گزینه ۳: نادرست. نمی‌توان استفاده طولانی‌مدت داشت، زیرا نیمه‌عمر آن کوتاه است.

گزینه ۴: نادرست. اورانیم نه آهن.

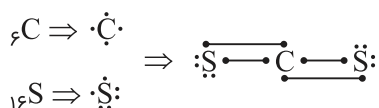
ابتدا باتوجه به توضیحات بیان‌شده، عناصر مدنظر را پیدا می‌کنیم:

$\underline{C} \Rightarrow$ عنصر B همان کربن است $1s^2 2s^2 2p^2 \Rightarrow$ اتم عنصر B دارای ۲ الکترون با $l = 1$

(مجموع الکترون‌ها با $l = 0$ - مجموع الکترون‌ها با $l = 1$) $\Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 \Rightarrow$ اتم عنصر C

$\rightarrow$ عنصر C همان گوگرد است $\rightarrow$ $16S$ $\Rightarrow (10 - 6) = 4$

ترکیب $6C$ و $16S$ که هر دو نافلز هستند کووالانسی بوده و CS_2 را تشکیل می‌دهند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. الکترون در همه نواحی اطراف هسته دیده می‌شود، اما در نواحی خاصی بیشتر حضور دارد.

گزینه ۳: نادرست. انرژی لایه‌های الکترونی پیرامون هسته هر اتم، ویژه همان اتم بوده و به عدد اتمی آن بستگی دارد.

گزینه ۴: نادرست. انرژی در نگاه ماکروسکوپی، پیوسته و در نگاه میکروسکوپی، گسسته یا کوانتومی است.

فرمول اتیل بوتانوات $C_6H_{12}O_2$ بوده و جرم مولی آن ۱۱۶ گرم بر مول است.

به راحتی و با نسبت $\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$ تعداد مول آن محاسبه می‌شود:

$$1C_6H_{12}O_2 \sim 1C_6H_{12}O_2$$

$$\frac{23/2}{116 \times 1} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = 0.2 \text{ mol}$$

برای محاسبه تعداد اتم H کافی است نسبت‌های $\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$ را برای هم‌ارزی زیر بنویسیم:

$$1C_6H_{12}O_2 \sim 12H$$

$$\frac{23/2}{116 \times 1} = \frac{y}{6/0.2 \times 10^{23} \times 12} \Rightarrow y = 2/4 \times 6/0.2 \times 10^{23} = 1/44 \times 10^{24} \text{ H اتم}$$

پاسخ درست پرسش‌ها:

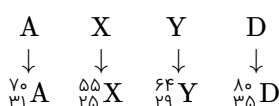
الف) $^{33}_{17}Cl$ و $^{33}_{33}As \Leftarrow 16 = 33 - 17$

ب) سبز

ت) نئون

$$1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \Rightarrow \text{درصد جرمی Se} : \frac{9}{13} = \frac{3 \times 78}{3 \times 78 + 2X} \Rightarrow X = 52$$

$$P + \underbrace{(P + 4)}_n = 52 \Rightarrow P = 24 \xrightarrow{24 \text{ Cr}} \begin{cases} \ell = 0 \Rightarrow 7 \text{ الکترون} \\ \ell = 1 \Rightarrow 12 \text{ الکترون} \end{cases}$$



مجموع شمار الکترون‌ها در لایه اول و دوم برای عناصر دوره چهارم برابر با ۱۰ می‌باشد.

(۱) نادرست؛ میان دو عنصر $^{35}_{18}D$ و $^{25}_{12}X$ ، ۹ عنصر وجود دارد و نه ۱۰ تا

(۲) درست؛ $^{30}_{30}Zn$ فقط یون $2+$ تشکیل می‌دهد.

(۳) درست؛ $^{45}_{20}Ca^{2+} : [18Ar]3d^5$ و $^{45}_{20}Y^{+} : [18Ar]3d^5$

$$\frac{45 - 35}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ درست؛ (۴)}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. مرحله پالایش نفت خام پس از جدا کردن نمک‌ها، اسیدها و آب از نفت خام آغاز می‌شود.

گزینه ۲: نادرست. ۱- هگزن همپار (ایزومر) سیکلوهگزان است.

گزینه ۳: نادرست. مطابق کتاب درسی، با عبور گوگرد دی‌اکسید از روی کلسیم اکسید، ماده‌ای به فرمول شیمیایی $CaSO_3$ تولید می‌شود که کلسیم سولفیت نامیده می‌شود. فرمول شیمیایی کلسیم سولفات $CaSO_4$ است.

گزینه‌های (ب) و (پ) درست می‌باشند.

بررسی گزینه‌های نادرست و علت آن‌ها:

(الف) خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه بوده در حالی‌که رفتار شیمیایی آن‌ها همانند نافلزهاست.

(ت) باتوجه‌به آن که آهنک مصرف و استخراج فلز بسیار بیشتر از بازگشت آن به طبیعت است، فلزات منابعی تجدیدناپذیر می‌باشند.

(ث) یکی از مزایای استفاده از فلز طلا حفظ رسانایی در دماهای گوناگون است.

عبارت دوم درست است.

بررسی سایر عبارت‌ها:

عبارت اول: نادرست. مطابق کتاب درسی، شیب نمودار با کاهش عدد اتمی دائماً افزایش نمی‌یابد.

عبارت سوم: نادرست. فرآورده‌های این واکنش‌ها، نمک NaCl ، آهن (II) هیدروکسید و آهن (III) هیدروکسید هستند که در یون هیدروکسید پیوند

کووالانسی وجود دارد.

عبارت چهارم: نادرست. سدیم نرم است و با چاقو بریده می‌شود و برخلاف آهن و تیتانیم از استحکام بالایی برخوردار نیست.

عبارت‌های درست: (الف)، (پ) و (ث).

(الف) خاصیت نافلزی: ${}_{15}\text{P} < {}_{17}\text{Cl} < {}_8\text{O}$

(ب) نادرست: شعاع اتمی: $A < B > D$

(پ) درست. دو عنصر $(C = {}_4\text{Be})$ و $(E = {}_{14}\text{Si})$ ، در این جدول یون تشکیل نمی‌دهند.

(ت) نادرست. ۵ عنصر H و E و D و C و I که در گروه‌های زوج هستند عدد اتمی زوج دارند و تعداد آن‌ها از ۵۰ درصد کمتر است.

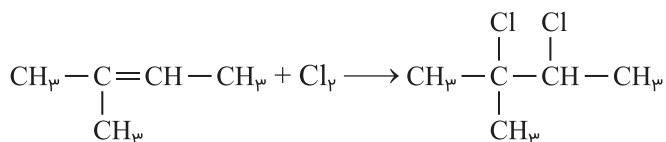
(ث) درست.

۱ - (اختلاف عددهای اتمی) = تعداد عناصر بین دو عنصر

عنصر $E = {}_{14}\text{Si}$ ، و عنصر $\text{Br} = K$ ۳۵ است پس:

عنصر $20 = 1 - (14 - 35) =$ تعداد عناصر بین E و K

فلز طلا دارای رسانایی الکتریکی زیادی است و این رسانایی را در شرایط دمایی گوناگون حفظ می‌کند.



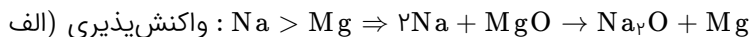
۲- متیل ۲- بوتن

۲ و ۳- دی کلرو ۲- متیل بوتان

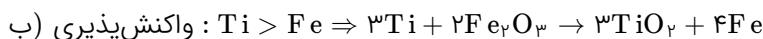
چالش سوال:

واکنش‌نویسی هیدروکربن‌های سیرنشده

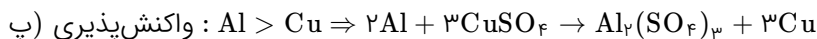
همه واکنش‌های داده‌شده به‌طور خودبه‌خودی انجام می‌شوند.



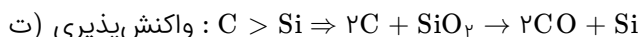
$_{11}\text{Na}$ با آرایش $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ، ۵ الکترون با $l = 0$ داشته و دومین فلز قلیایی خاکی Mg است.



در $_{22}\text{Ti}$ با آرایش $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$ ، تعداد الکترون‌های لایه سوم ۵ برابر لایه چهارم است.



Cu^{2+} کاتیونی با آرایش $[\text{Ar}]3d^9$ بوده و Al آخرین فلز دوره سوم است.



اولین شبه‌فلز گروه ۱۴، Si است.

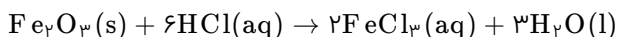
گوگرد مانند نیتروژن در طبیعت به‌صورت آزاد وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست. باتوجه به کتاب درسی.

گزینه ۲: درست. سرعت واکنش فلز آهن از مس در هوای مرطوب بیشتر است.

گزینه ۳: درست. طبق معادله زیر:



مجموع ضرایب مواد برابر با ۱۲ است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست. عنصری که در وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد، اسکاندیم است که نخستین عنصر واسطه می‌باشد. (نخستین عنصر دوره چهارم پتاسیم است)

ب) نادرست. در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

پ) درست. نخستین عنصری که لایه سوم آن از الکترون پر می‌شود، مس است و دومین عنصری که لایه سوم آن از الکترون پر می‌شود، روی می‌باشد. مطابق کتاب درسی، واکنش‌پذیری روی از مس بیشتر است.

ت) نادرست. بررسی‌ها نشان می‌دهند که عنصرهای جدول دوره‌ای را بر اساس رفتار آن‌ها می‌توان در سه دسته شامل فلز، نافلز و شبه‌فلز جای داد.